CONCOURS COMMUN MINES, PONTS, TELECOM,.. 1975
OPTION P' - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

Cette épreuve spécifique aux candidats de l'option P' comporte 4 pages.

PARTIE I

1°) On désigne par m un entier positif, par k un entier relatif, par ϕ un nombre réel tel que $\sin \phi \neq 0$, et par $A_m(\phi)$, $B_m(\phi)$ les deux sommes :

$$A_m(\phi) = \sin \phi + \sin 3\phi + \ldots + \sin (2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{k=m-1} \sin (2k+1)\phi \ ;$$

$$B_m(\phi) = \cos \phi + \cos 3\phi + \ldots + \cos (2m-1)\phi = \sum_{k=0}^{k=m-1} \cos (2k+1)\phi \ .$$

Démontrer les relations :

$2(\sin \phi) A_m(\phi) = 1 - \cos 2m\phi$;

$2(\sin \phi) B_m(\phi) = \sin 2m\phi$.

En déduire une expression, en fonction de m, $\sin \phi$, $\cos \phi$, $\sin 2m\phi$, $\cos 2m\phi$, des deux sommes :

$$C_m(\phi) = \sum_{k=0}^{k=m-1} (2k+1) \sin (2k+1)\phi \ ;$$

$$D_m(\phi) = \sum_{k=0}^{k=m-1} (2m-2k-1) \sin (2k+1)\phi \ .$$

2°) On désigne par m et p deux entiers tels que :

$$1 \leqslant p < 2m \ .$$

On considère la fonction R de la variable t définie par :

$$R(t) = \frac{t^{p-1} + t^{2m-p-1}}{1 + t^{2m}} \ .$$

Les zéros du polynôme $(1 + t^{2m})$ sont des nombres complexes de la forme $e^{i\omega_k}$, où $\omega_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}$ (k entier relatif) ; démontrer la relation :

$$R(t) = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{\sin \omega_k \cdot \sin p\omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} \ .$$

Calculer l'intégrale :

$$I(2m,p) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} R(t)\, dt \ ,$$

et démontrer la relation :

$$I(2m,p) = \frac{\pi}{2m \sin \frac{p\pi}{2m}}$$

PARTIE II

1°) On désigne par α et β deux nombres réels ; à tout couple (α,β) on associe le point ayant pour coordonnées (α,β) dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère les trois intégrales :

$$(1) \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \quad ; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \; ; \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \; .$$

Déterminer et représenter géométriquement l'ensemble E_1 (respectivement l'ensemble E_2) des points (α,β) pour lesquels l'intégrale (1) [respectivement l'intégrale (2)] est convergente. Démontrer que l'ensemble E des points (α,β) pour lesquels l'intégrale (3) est convergente est défini par l'inégalité stricte $\beta(\alpha-\beta) > 0$; quelle est la représentation géométrique de E ?

On appelle g, h, f les fonctions des variables α,β, définies respectivement sur E_1, sur E_2, sur E par les relations :

$$g(\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \quad ; \quad h(\alpha,\beta) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt \quad ; \quad f(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t^{\alpha}}\,dt.$$

2°) On désigne par λ un nombre réel non nul.

Démontrer les relations suivantes, en précisant, pour chacune d'elles, l'ensemble des points (α,β) sur lequel elle est vérifiée :

si $\lambda > 0$: $g(\lambda\alpha,\lambda\beta) = \frac{1}{\lambda} g(\alpha,\beta)$; $h(\lambda\alpha,\lambda\beta) = \frac{1}{\lambda} h(\alpha,\beta)$; $f(\lambda\alpha,\lambda\beta) = \frac{1}{\lambda} f(\alpha,\beta)$;

si $\lambda < 0$: $g(\lambda\alpha,\lambda\beta) = -\frac{1}{\lambda} h(\alpha,\beta)$; $h(\lambda\alpha,\lambda\beta) = -\frac{1}{\lambda} g(\alpha,\beta)$; $f(\lambda\alpha,\lambda\beta) = -\frac{1}{\lambda} f(\alpha,\beta)$;

$g(\alpha,\beta) = h(-\alpha,-\beta) = h(\alpha,\alpha-\beta)$; $h(\alpha,\beta) = g(-\alpha,-\beta) = g(\alpha,\alpha-\beta)$;

$f(\alpha,\beta) = f(-\alpha,-\beta) = f(\alpha,\alpha-\beta)$.

On désigne par ρ la fonction d'une variable t, définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, par :

$$\rho(t) = \frac{t^{\beta-1} + t^{\alpha-\beta-1}}{1+t^{\alpha}} \; .$$

Démontrer qu'en tout point de E on a les relations :

$$(4) \quad f(\alpha,\beta) = \int_0^1 \rho(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \rho(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \rho(t)\,dt \; .$$

Soit E' le sous-ensemble de E défini par les inégalités $0 < \beta < \alpha$. Démontrer qu'en tout point (α,β) de E' on a les relations :

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta} f\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1\right) = \frac{1}{\alpha} f\left(1, \frac{\beta}{\alpha}\right) \; .$$

Ces relations sont-elles vérifiées en tout point de l'ensemble E ?

3°) On considère en particulier la fonction F d'une variable α, définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $F(\alpha) = f(\alpha,1)$.

En utilisant l'une des expressions de $f(\alpha,1)$ données par les formules (4), montrer que :

$$|F(\alpha') - F(\alpha)| < \frac{|\alpha' - \alpha|}{(\alpha-1)(\alpha'-1)} .$$

Démontrer que la fonction F est décroissante et continue sur $]1,+\infty[$

4°) Soit α un <u>rationnel</u> supérieur à 1 ; parmi les fractions équivalentes à α, on en choisit une de la forme $\frac{2m}{p}$, p et m étant deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p < 2m$; démontrer que l'on a alors la relation :

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}} .$$

Démontrer que cette relation est vérifiée quel que soit α <u>réel</u> supérieur à 1.

Démontrer qu'en tout point (α,β) de l'ensemble E' :

$$f(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi\beta}{\alpha}} .$$

Cette relation est-elle vérifiée en tout point de l'ensemble E où la fonction f est définie ?

PARTIE III

On désigne par Z l'anneau des entiers relatifs, par x un nombre réel n'appartenant pas à Z ($x \notin Z$), et par n un entier naturel.

1°) On considère les deux séries :

(5) $$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+x} + \ldots$$

(6) $$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{3-x} \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} + \ldots$$

et les deux intégrales supposées convergentes :

$$g(1,x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt \quad ; \quad g(1, 1-x) = \int_0^1 \frac{t^{-x}dt}{1+t}$$

Démontrer que les deux séries sont semi-convergentes ; on désigne par s(x) la somme de la série (5), par σ (x) la somme de la série (6).

En utilisant l'identité :

$$1 = (1+t)\,[1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n] + (-1)^{n+1} t^{n+1}$$

démontrer les relations :

pour $x > 0$: $s(x) = g(1,x)$;

pour $x < 1$: $\sigma(x) = g(1, 1-x)$;

pour $0 < x < 1$: (7) $s(x) + \sigma(x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

2°) Quel que soit x ($x \notin Z$), il existe un entier relatif q tel que :

$$q < x < q + 1 \ .$$

En comparant les deux sommes :

$s(x) + \sigma(x)$ et $s(x - q) + \sigma(x - q)$,

démontrer que la relation (7) est vérifiée quel que soit x ($x \notin Z$).

3°) A partir de la relation (7), donner une expression explicite, à l'aide de fonctions élémentaires :

de la somme de la série absolument convergente :

$$\frac{1}{1^2 - x^2} - \frac{1}{2^2 - x^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2} + \ldots ;$$

de la somme de la série semi-convergente :

$$\frac{1}{1^2 - y^2} - \frac{3}{3^2 - y^2} + \ldots + \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - y^2} + \ldots$$

où y est un nombre réel différent de tout entier relatif impair.

∴

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail